De Suiker en de Weegschaal

Vanaf zekere, vaste hoogte giet ik suiker in een constante stroom op een weegschaal. Als ik wil bereiken dat er precies $1\,\mathrm{kg}$ suiker op de weegschaal ligt, moet ik dan stoppen met gieten op een moment dat de weegschaal *minder dan* $1\,\mathrm{kg}$, *precies* $1\,\mathrm{kg}$, of *meer dan* $1\,\mathrm{kg}$ aanwijst?

Tijdens het proces is de aanwijzing van de weegschaal gelijk aan het gewicht van de al op de schaal liggende suiker plus de reactiekracht die het gevolg is van het afremmen van de neerkomende suiker; het gewicht van de suiker die nog onderweg is draagt daarentegen niet aan deze aanwijzing bij. Om de gestelde vraag te kunnen beantwoorden moet ik dus twee zaken weten: de grootte van deze reactiekracht en het gewicht van de suiker die nog onderweg is. De uiteindelijke aanwijzing van de weegschaal is immers gelijk aan de aanwijzing op het moment dat ik stop met gieten, verminderd met de reactiekracht en vermeerderd met het gewicht van de nog vallende suiker.

*　　*　　*

Met m geef ik de (constante) grootte van de suikerstroom aan –uitgedrukt in massaeenheden per tijdseenheid–, en met t geef ik de tijdsduur aan die ieder suikerkorreltje nodig heeft om over de gegeven hoogte naar beneden te vallen. De totale hoeveelheid vallende suiker is dan $m{\cdot}t$ en het gewicht hiervan is $m{\cdot}g{\cdot}t$, waarin g de versnelling van de zwaartekracht ter plaatse is.

Een neerkomend suikerkorreltje oefent, bij wijze van reactiekracht, een *krachtpulsje* –een stootje– uit op de weegschaal. Ik neem nu aan dat de weegschaal zo traag is dat wij alleen met de *gemiddelde waarde* van dit krachtpulsje hoeven te rekenen, dat is, de integraal van deze kracht over één tijdseenheid. (Ik veronderstel hierbij die tijdseenheid groter dan de tijdsduur van het pulsje.) Voor een korreltje met massa μ en snelheid v is deze gemiddelde kracht gelijk aan de impuls $\mu{\cdot}v$ van het korreltje. Een suikerstroom ter grootte m die neerkomt met snelheid v oefent nu een kracht $m{\cdot}v$ uit op de weegschaal. (Deze kracht is immers de som van de door alle deeltjes in de stroom uitgeoefende krachten, wegens het superpositiebeginsel, oftewel omdat $\int$ over $+$ distribueert.) In het (homogene) zwaartekrachtveld geldt: $v = g{\cdot}t$; aldus krijgen we voor de door de neerkomende suiker uitgeoefende kracht op de weegschaal: $m{\cdot}g{\cdot}t$, wat precies gelijk is aan het gewicht van de hoeveelheid suiker die nog onderweg is!

Het antwoord op de gestelde vraag is dus: ik moet stoppen zodra de weegschaal precies $1\,\mathrm{kg}$ aanwijst.

*   *   *

Toen ik deze opgave voor de eerste keer oploste drukte ik de valtijd t uit in de hoogte h met behulp van de formule $t = \sqrt{(2 \cdot h)/g}$; dit leidt vervolgens tot de behoefte om de snelheid v te elimineren met $v = \sqrt{2 \cdot h \cdot g}$. Deze formules –en hun rechtvaardiging!– zijn echter allemaal overbodig, als je maar een naam invoert voor de valtijd in plaats van voor de hoogte; uit het voorafgaande blijkt immers dat de hoogte irrelevant is: we hebben alleen de (eenvoudigere) betrekking $v = g \cdot t$ nodig. (Deze betrekking houdt trouwens geen rekening met de luchtweerstand, dus mijn oplossing is alleen correct als de luchtweerstand mag worden verwaarloosd.) Dit illustreert maar weer eens hoe belangrijk de keuze is van wat je wel en (vooral) wat je niet benoemt.

Het moeilijkste aan deze opgave is het bepalen van het effect op de weegschaal van een erop vallend deeltje, en de observering dat dit de impuls van dat deeltje is. Voor fysici is dit ongetwijfeld gesneden koek; als niet-fysicus kon ik het omdat ik mij van vroeger herinnerde dat de gaswet van Boyle kan worden *afgeleid* uit een beschouwing over botsingen van individuele gasdeeltjes tegen de wand van het vat. Daarbij speelde de impuls van die deeltjes een hoofdrol.

Dat de uitgeoefende kracht precies gelijk is aan het gewicht van de vallende suiker verbaast mij nog steeds, maar ik kan hier zo één, twee, drie geen fysische interpretatie aan geven. Leuk is het wel!

Eindhoven, 9 oktober 1995

Rob R. Hoogerwoord
faculteit der Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
postbus 513
5600 MB Eindhoven