Logisch rekenen, een voorstudie (bespot Raymond Smullyan)

Er bestaan zogenaamde "logische puzzels" waarin twee soorten mensen een rol spelen: zij die altijd de waarheid spreken en zij die altijd liegen. Het patroon van deze puzzels is: als je niet weet of je een waarheidspreker of een leugenaar voor je hebt hoe kun je dan toch iets van hem te weten komen? Beperkende spelregels hierbij zijn dat je alleen vragen mag stellen waarop de enig mogelijke antwoorden "ja" en "nee" zijn, dat je (meestal) maar één vraag mag stellen, en dat die vraag eenvoudig — bijvoorbeeld: maximaal 3 woorden — moet zijn geformuleerd.

Voorbeeldje: Het is zinloos om de vraag "Bent U eerlijk?" te stellen, want het antwoord zal altijd "ja" zijn.
□

In zijn boekje "Bespot de spotvogel" geeft Raymond Smullyan een aantal van zulke puzzels met hun oplossingen. Bij iedere oplossing deelt Smullyan zijn lezers mee wat de te stellen vraag is — zonder te vertellen hoe hij daar aan komt — plus een bewijs dat dat inderdaad de juiste vraag is. In zo'n bewijs onderscheidt hij 4 gevallen: er zijn tenslotte 2 mogelijke antwoorden op de vraag waarop je het antwoord wil weten, er zijn 2 soorten mensen die je voor je kunt hebben, en $2 \times 2 = 4$. Smullyan's bewijzen beslaan dan ook al gauw een halve pagina tekst en het lezen ervan is vermoeiend.

Ik wil laten zien dat er een aantrekkelijke en systematische manier bestaat om deze puzzels aan te pakken: we gaan hun oplossingen <u>uitrekenen</u>. Deze puzzels gaan niet over getallen maar over vragen waarop "ja" en "nee" de mogelijke antwoorden zijn. We kunnen dan ook niet de gewone rekenkunde gebruiken. In plaats daarvan gebruiken we de zogenaamde <u>ja/nee-calculus</u> die we speciaal voor ons doel ontwerpen. Daarmee zijn de puzzels geen puzzels meer maar gewone sommetjes.

Wat is een calculus? Een calculus bestaat uit een verzameling formules — dat zijn symboolrijtjes van een geschikt gekozen vorm — en een aantal spelregels die aangeven hoe je met die formules mag rekenen. In de algebra, bijvoorbeeld, zijn 2, $2+3$, $(x+5)\times y$ formules terwijl $+x$ en $)x+5((y$ geen formules zijn. Een rekenregel in de algebra is $x+y = y+x$ terwijl $x-y = y-x$ geen rekenregel is. Onze ja/nee-calculus zal heel eenvoudig zijn: eenvoudige formules en maar een paar rekenregels. De ja/nee-calculus is speciaal ontworpen voor de eerdergenoemde logische puzzels. Voordat we de regels van het spel kunnen opstellen, moeten we daarom ons probleem zorgvuldig analyseren.

Iemand die altijd de waarheid spreekt noem ik <u>eerlijk</u>, iemand die altijd liegt noem ik <u>vals</u>. Een vals iemand zegt ja als het nee moet zijn en nee als het ja moet zijn. Alle andere betekenissen van de woorden "eerlijk" en "vals" doen er hier niet toe: het zijn maar namen om twee soorten mensen uit elkaar te houden; ik had evengoed "zwart" en "wit" kunnen gebruiken. Merk op dat valse mensen uiterst consequent ja en nee verwisselen: valse mensen zijn net zo betrouwbaar als eerlijke.

Neem eens aan dat we ene Jan ontmoeten, waarvan we niet weten tot welke soort hij behoort, en dat we aan hem een vraag stellen. Dan zijn er 4 mogelijkheden die we in een tabelletje kunnen opsommen:

het antwoord op de vraag is:	Jan is:	Jan zegt:
ja	eerlijk	ja
nee	eerlijk	nee
ja	vals	nee
nee	vals	ja

Dit tabelletje geeft wel alle gevallen weer maar het is nog niet zo bruikbaar. Het wordt al beter als we ons realiseren dat we Jan z'n soort ook als het antwoord op een vraag kunnen voorstellen. Zo krijgen we een nieuw tabelletje:

het antwoord op de vraag is:	is Jan eerlijk?	Jan zegt:
ja	ja	ja
nee	ja	nee
ja	nee	nee
nee	nee	ja

Wat er, op iedere regel, in de derde kolom staat hangt af van wat er in de eerste en de tweede kolom staat. Wiskundig gesproken is de derde kolom een functie van de eerste twee kolommen. Als in de eerste en tweede kolommen x en y staan dan noteren we wat in de derde kolom staat als $x \equiv y$. Hierin is $\equiv$ een operator — de enige — in onze ja/nee-calculus. De operator $\equiv$ wordt nu gedefinieerd met behulp van het volgende tabelletje:

x	y	$x \equiv y$
ja	ja	ja
nee	ja	nee
ja	nee	nee
nee	nee	ja

Dit tabelletje verschilt alleen van het vorige in wat er boven de kolommen staat: we hebben geabstraheerd van Jan en de vragenstellerij en daaruit gedestilleerd wat daaraan (kennelijk) essentieel is: de $\equiv$ operator. Merk op dat uit $x \equiv y$ alleen dan ja komt als $x = y$ en anders niet; in de logica wordt $\equiv$ daarom wel de "equivalentie operator" genoemd.

Als het hierbij zou blijven dan was bovenstaande exercitie zinloos. Uit het tabelletje voor de $\equiv$ kunnen we echter allerlei rekenregels afleiden die ons spel tot een echte calculus verheffen. In de rekenkunde werken we ook niet met de tafels van optelling en vermenigvuldiging maar met de operatoren $+$ en $\times$ en hun rekenregels.

Uit de eerste twee regels van de tabel voor $\equiv$ volgt bijvoorbeeld onze eerste rekenregel, die we "rja-regel" (rechter ja) noemen:

(rja) $\qquad x \equiv ja \quad = \quad x$.

Er is ook een "lja-regel" (linker ja):

(lja) $\qquad ja \equiv x \quad = \quad x$.

De derde rekenregel is hierboven al genoemd. We noemen hem de "equiregel":

(equi) $\qquad x \equiv x \quad = \quad ja$.

In principe leveren deze drie regels alles wat nodig is om met ja/nee-calculus te kunnen werken: de tabel voor $\equiv$ kan met behulp van deze regels worden gereconstrueerd; we kunnen die tabel dus verder vergeten. Van iedere formule die°) is opgebouwd uit ja's, nee's, $\equiv$ en haakjes kunnen we de uitkomst uitrekenen. Bijvoorbeeld:

$(ja \equiv nee) \equiv nee$
$=$ { lja-regel, met $x = nee$ }
$nee \equiv nee$
$=$ { equi-regel, met $x = nee$ }
ja.

En:

°) op een nette manier, uiteraard

$$
\begin{array}{ll}
 & ja \equiv (nee \equiv nee) \\
= & \quad \{ \text{equi-regel, met } x = nee \} \\
 & ja \equiv ja \\
= & \quad \{ \text{equi-regel, met } x = ja \} \\
 & ja .
\end{array}
$$

We hadden in de laatste stap ook de lja- of de rja-regel kunnen gebruiken: soms kan hetzelfde — gelukkig wel! — resultaat op meer manieren worden verkregen.

Uit het voorbeeld volgt dat $ja \equiv (nee \equiv nee)$ gelijk is aan $(ja \equiv nee) \equiv nee$. Dit is een speciaal geval van nog een rekenregel, de "assoc-regel":

(assoc) $\qquad x \equiv (y \equiv z) \quad = \quad (x \equiv y) \equiv z$.

De assoc-regel kan, door alle 8 combinaties van x, y, z waarden in te vullen, worden bewezen met behulp van de andere regels. Omdat het vervelend en bewerkelijk is dat steeds weer opnieuw te moeten doen, voegen we hem aan ons repertoire van regels toe.

Tenslotte is er nog de "symm-regel", die wij voor onze puzzels nauwelijks nodig hebben:

(symm) $\qquad x \equiv y \quad = \quad y \equiv x$.

* *

*

Terug naar onze logische puzzels. Laat E (het antwoord op) de vraag "is Jan eerlijk?" zijn en laat X (het antwoord op) een of andere vraag zijn. Als we nu aan Jan vraag X stellen dan is zijn antwoord $X \equiv E$.

(Zo hebben we onze calculus tenslotte ontworpen!)
Het probleem: laat A een vraag zijn waarop wij het antwoord willen weten; wat moeten we aan Jan vragen opdat zijn antwoord het antwoord op A is?
De oplossing is dat we een vraag X moeten bedenken zodanig dat $X \equiv E = A$. Daar gaat-ie:

$$
\begin{array}{ll}
 & A \\
= & \{\text{ rja-regel , om een } \equiv \text{ bij te fokken }\} \\
 & A \equiv ja \\
= & \{\text{ equiregel , om E's te fokken }\} \\
 & A \equiv (E \equiv E) \\
= & \{\text{ assocregel, om de gewenste vorm te krijgen}\} \\
 & (A \equiv E) \equiv E \quad .
\end{array}
$$

De formule $(A \equiv E) \equiv E$ is van de vorm $X \equiv E$, namelijk met $X = (A \equiv E)$. Om antwoord op de vraag A te krijgen moeten we aan Jan de vraag $A \equiv E$ stellen. In gewoon Nederlands komt dit neer op:

(0) "Is het antwoord op vraag A hetzelfde als het antwoord op de vraag 'is Jan eerlijk?'°) ?"

Dit is natuurlijk nogal een ingewikkelde formulering, maar zonder verdere kennis van A kan ik het niet beter. De volgende formulering komt ook wel voor:

(1) "Wat zou U antwoorden als ik U vraag A zou stellen?"

°) 'bent U eerlijk?' mag natuurlijk ook.

Ik verkies formulering (0) in de volgende toepassingen.

In veel puzzels gaat het om 2 personen —meestal broers, maar dat doet er niet toe—, waarvoor geldt:

- de een is eerlijk, de ander is vals
- de een heeft een eigenschap P, de ander heeft die eigenschap niet.

De bedoeling van de puzzel is dan hetzij een vraag te formuleren die aan het licht brengt of de aangesproken persoon —Jan, zogezeid— eigenschap P heeft, hetzij een vraag te formuleren die aan het licht brengt of eigenschap P bij de eerlijke danwel bij de valse persoon berust.

Een eigenschap die de ene persoon wel heeft en de ander niet noem ik een <u>identificerende eigenschap</u>: voor elke zo een eigenschap kunnen we spreken over <u>de</u> persoon mét en <u>de</u> persoon zónder die eigenschap. Eerlijkheid is, bijvoorbeeld, zo een eigenschap. Voor elk 3-tal identificerende eigenschappen P, Q en R geldt nu:

<u>lemma</u>

"de persoon met P heeft Q" ≡ "de persoon met Q heeft R"

≡

"de persoon met P heeft R".

□

Het lemma kan worden berekend m.b.v. een gepast opgezette "eigenschappencalculus". Dit heeft echter weinig zin.

Het lemma stelt ons in staat om vraag (0) voor deze klasse puzzels te vereenvoudigen:

"heeft U eigenschap P?" ≡ "bent U eerlijk ?"
= {lemma}
"is de persoon met eigenschap P eerlijk?" .

<u>Voorbeelden</u>:

"heet U Jan?"	wordt	"is Jan eerlijk ?"
"bent U eerlijk?"	wordt	"bent U U?"
	of	"is de eerlijke eerlijk?"
	of	"zeg eens ja?"
"bent U U ?"	wordt	"bent U eerlijk?"
"is Jan eerlijk?"	wordt	"bent U Jan?"

Dit bevredigt mij allerminst! Ik heb last van mijn verlangen het verhaal voor 6-de klassers begrijpelijk te maken. Vergeten we dat even....

De volgende behandeling, waarin ja/nee-calculus hetzelfde is als Boolean calculus, is onmiskenbaar fraaier.

Terug naar het Boolean domein, waarin $\equiv$ en $=$ samenvallen. De specificatie van de te stellen vraag X zodat er antwoord op vraag A wordt gegeven (vgl. p.6+5) wordt dan $(X \equiv E) \equiv A$ en we rekenen:

$$\begin{array}{ll} & (X \equiv E) \equiv A \\ = & \quad \{\text{associativiteit van } \equiv\} \\ & X \equiv (E \equiv A) \, . \end{array}$$

Klaar, in 1 stap!

Over "identificerende eigenschappen". Op de identificerende eigenschappen definieer ik de relatie $\sim$ door:

$P \sim Q \equiv$ "eigenschappen P en Q zijn in dezelfde persoon verenigd".

Dit is een equivalentie-relatie! Het lemma wordt nu (dit omvat de transitiviteit van $\sim$):

<u>lemma</u> $P \sim Q \equiv Q \sim R \equiv R \sim P$

□

In de soort puzzels die ik in gedachten heb spelen in feite 3 identificerende eigenschappen een rol, namelijk:

U : identificeert de aangesproken persoon ,
E : identificeert de eerlijke persoon ,
P : de eigenschap die ons interesseert .

Nu hebben we :

"bent U eerlijk?" $\equiv$ $U \sim E$
"heeft U eigenschap P?" $\equiv$ $U \sim P$
"is degene met P eerlijk?" $\equiv$ $P \sim E$.

Propositie E ("bent U eerlijk?") van de vorige pagina's is nu dus $U \sim E$.
Nu hebben we :

$$
\begin{aligned}
& U \sim P \equiv U \sim E \\
= & \quad \{ \text{symmetrie } \sim , \text{ lemma} \} \\
& E \sim P \\
= & \quad \{ \text{symmetrie } \sim \} \\
& P \sim E \quad .
\end{aligned}
$$

Interpretatie : om antwoord op "heeft U eigenschap P ?" te krijgen moet je "is degene met P eerlijk?" vragen . Evenzo : $(P \sim E \equiv U \sim E) \equiv U \sim P$, dus om antwoord op "is degene met P eerlijk?" te weten te komen moet je "heeft U eigenschap P?" vragen .
Als P de eigenschap "Jan heten" is dan krijg je het volgende tabelletje :

de vraag:	geeft antwoord op:
"is Jan eerlijk?"	"bent U Jan?"
"bent U Jan?"	"is Jan eerlijk?"
"bent U eerlijk?"	"geldt true?"
"geldt true?"	"bent U eerlijk?"

Voor elk van de 4 tabelentries geeft Smullyan een puzzel (in volgorde: puzzels 3,4,6 en 5 in hoofdstuk 2). Later geeft hij er nog 2 (7 en 8 in hoofdstuk 2) die hetzelfde zijn als de eerste twee. Voor die 2 geeft hij wéér uitvoerige oplossingen, met 4-voudig gevalsonderscheid. Dat Smullyan niet wil rekenen is nog tot daar aan toe, dat hij het abstractievermogen mist om twee puzzels als identiek te identificeren vind ik (voor een logicus) een schande!

Tenslotte, als ik zou besluiten een oplossing met uitputtend gevalsonderscheid te presenteren dan zou ik dat in de vorm van een tabel doen. Dat is overzichtelijker, kost minder ruimte en het is minder vermoeiend voor de lezer. Bovendien zou zo'n tabelletje onmiddellijk verraden dat al die gevallen een zekere regelmaat vertonen, namelijk dezelfde regelmaat als in de definitie van $\equiv$ voorkomt. Dat zou me dan misschien alsnog op meer algebraïsche ideeën brengen.

(so far, so good voorlopig...)
Eindhoven, 26 juni 1990
Rob Hoogerwoord.